Série $N°$ 4:

Généralité sur les fonctions et Applications:

Exercice 0.1

Dans chacun des cas dire si f est une application de A vers $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x^2-4}$ avec $A =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+7}}{x} + \frac{2}{3x-4}$ avec $A = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{2 - |3x-5|}$ avec $A = [-1; \frac{7}{3}]$.
4. $f(x) = \frac{x-2}{|2x-1|-|x|}$ avec $A = \mathbb{R} \diagdown \{1; \frac{1}{3}\}$

Exercice 0.2

Dans chacun des cas suivant dire si l'application f est injective, surjective.

a. $\begin{cases} f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{2\} \\ x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{2x-4} \end{cases}$ b. $\begin{cases} f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto f(x) = 2x - 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} f : [-1; 4] \to [0; \frac{5}{2}] \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4} \end{cases}$ e. $\begin{cases} f : [\frac{1}{2}; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-1} \end{cases}$

Exercice 0.3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-1| + 2|3-x| + x^2$.

1. Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. En déduire la restriction g de f sur $[1; 3]$.
3. L'application g est-elle injective? surjective?
4. Déterminer $g([1; 3])$, $g^{-1}(5)$ et $g^{-1}(]5; 7[)$.

Exercice 0.4

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes:
1) $f(x) = \sqrt{-x}$; 2) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; 3) $h(x) = \sqrt{1-x}$; 4) $i(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; 5) $j(x) = \frac{2x-3}{6x^2-13x-5}$
6) $k(x) = \frac{2x}{6x^2-|13x-5|}$; 7) $l(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$; 8) $m(x) = \frac{3x-6}{|x-1|-|x-5|}$; 9) $n(x) = \sqrt{\frac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}$
10) $o(x) = \frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$; 11) $p(x) = \frac{1}{x+\sqrt{-x}}$ 12) $q(x) = x + \frac{1}{\sqrt{-x}}$ 13) $s(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 0.5

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes sur leurs domaines définitions:
a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$; c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$; d) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$; e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Exercice 0.6

On considère la fonction f pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x(x-2)$

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction f est minoré par -1.
4. Étudier les variations de f sur $]-\infty; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.
5. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 3]$

Exercice 0.7

On considère la fonction numérique définie par:

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Étudier la parité de la fonction f
3. Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$.
4. Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f.

Exercice 0.8

Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions $(f+g), (fg), (g \circ f)$ et $(f \circ g)$ en précisant d'abord l'ensemble de définition.

1. $f(x) = x^2$; et $g(x) = x - x^2$
2. $f(x) = -x^2 - x + 3$; et $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$
3. $f(x) = \sqrt{2x-1}$; et $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Exercice 0.9

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et g par $g(x) = x^2$.

1. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = g(x-a) + b$ avec a et b deux réels que l'on déterminera. En déduire que la courbe C_f de f se déduit de celle C_g de g par une transformation géométrique que l'on déterminera.
2. Montrer que la droite $(D) : x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie à C_f.
3. Donner dans chacun des cas suivants la transformation géométrique permettant d'obtenir la courbe de la fonction considéré à partir de la fonction f.
   a) $f_1(x) = |x^2 - 3x + 2|$; $f_2(x) = -x^2 + 3x - 2$; $f_3(x) = x^2 - 3|x| + 2$ et $f_4(x) = x^2 + 3x + 2$

Exercice 0.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = |x+1| + |x-1|$

1. Montrer que $f(-x) = f(x)$ puis conclure sur la parité de f. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Écrire $f(x)$ sana les symboles de la valeur absolue.

3. Étudier les variations de f sur $]-\infty;-1]$; $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

4. Représenter graphiquement f.

Exercice 0.11

On pose $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x-1}$ et $g(x) = 4 - x$

1. Déterminer les domaines de définition $D_f; D_g$ et $D_{f\circ g}$.

2. Calculer $f \circ g(x) + f(x)$ et en déduire que $\Omega(2;0)$ est centre de symétrie de la courbe C_f.

Exercice 0.12

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = 2x + 3$

1. Calculer $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\frac{1}{2})$

2. Démontrer que f est bijective et déterminer l'application réciproque.

3. La restriction à $\mathbb{Z}$ est-elle une bijection de $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

4. Soit $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 4 & \text{si x est pair} \\ \frac{x^2-x}{2} & \text{si x est impair} \end{cases}$

5. Déterminer l'image par g de chacun des entiers $(-2), (-1), 1, 2, 3$.

6. L'application g est injective? surjective?

Exercice 0.13

On donne les fonctions f, g, h définis de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que:
$f(x) = \frac{x^3}{|x|} + 1$ $\quad g(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$ $\quad h(x) = |2x+1| - |x-3| + 4$
Déterminer les restrictions

1. de f à $\mathbb{R}_+^*$, à $\mathbb{R}_-^*$ et à $[-1;1] \setminus (0)$

2. de g à $\mathbb{R}_+ \setminus (1)$ et à $\mathbb{R}_- \setminus (1)$

3. de h à $]-\infty;-\frac{1}{2}]$ à $[-\frac{1}{2};3]$ et à $[3;+\infty[$

Exercice 0.14

1. Une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : $3g(-x) + g(x) = 4x^3 + 2x$. Montrer que g est impair. Expliciter $g(x)$.

2. Soit f une fonction telle que pour tout réel x on ait : $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Calculer $f(x+4)$; $f(x+6)$ et $f(x+8)$ puis conclure sur la périodicité de f.

3. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel strictement positif a vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$. Démontrer que f est périodique puis préciser sa période.